Теоретический тур
Решения задач

Приведенные баллы и схема оценивания – приблизительные, жюри может их менять по своему усмотрению. В случае возникновения вопросов по задачам обращайтесь по телефону +375 29 257 08 09.

1. **(8 баллов за задачу, в ответах “Ложь” дополнительный балл ставится за объяснение)**

а) (2 балла) Ложь. Самая близкая к Солнцу звезда – система Альфы Центавра. Если рассматривать только звезды, видимые глазом, то Сириус будет стоять на втором месте. Но с учетом близких к нам красных и коричневых карликов Сириус опускается на 8-е место по удаленности от нас.

б) (2 балла) Ложь. Вращение Земли замедлилось, но совсем незначительно, чтобы так сильно поменялось число суток в году. Причина заключается в другом: современный григорианский календарь – солнечный, в его основе лежит тропический год, составляющий примерно $365{,}24219^d$. А год в лунном календаре – это 12 месяцев, каждый из которых равен в среднем периоду смены фаз Луны (примерно $29{,}53^d$). $12 \times 29{,}53^d = 354{,}36^d$, т. е. лунный год должен быть 354 дня либо 355 в случае високосных лет.

в) (1 балл) Истина. Есть, конечно! Это Церера, первый открытый астероид, который после введения определения карликовой планеты целиком под него подходит.

г) (1 балл) Истина. А еще вокруг него будет красивая планетарная туманность.

д) (1 балл) Истина. Вселенная расширяется с ускорением. Когда-то те далекие галактики, которые мы наблюдаем, удалялись от нас с досветовой скоростью, что позволило их свету дойти до нас. Однако уже сейчас или в будущем их скорость удаления превысит скорость света, и ничем догнать их не удастся. Кстати, это утверждение не противоречит постулатам специальной теории относительности – пространство вполне может расширяться и со сверхсветовыми скоростями.

е) (1 балл) Истина. Масса черной дыры пропорциональна ее радиусу, а объем – прямо пропорционален кубу радиуса. Тогда $\rho \propto R^{-2} \propto M^{-2}$, т. е. с ростом массы плотность будет быстро убывать. Нетрудно посчитать, что для плотности, равной плотности воздуха, черной дыре необходимо иметь массу в несколько миллиардов солнечных масс. На сегодняшний день абсолютный рекорд среди известных черных дыр составляет 66 млрд $M_\odot$.

2. **(4 балла)** Ответ нам подскажет график уравнения времени. Если бы в дни равноденствий среднее и истинное солнечное Солнце совпадали бы, то и уравнение времени было бы равно нулю. А это не так, как можно увидеть из графика. Значит, **среднее Солнце не совпадает с истинным в точках равноденствий.**

В реальности положение среднего Солнца определяется куда сложнее. Сначала вводится понятие среднего эклиптического Солнца – оно движется равномерно по эклиптике и совпадает с истинным Солнцем в моменты прохождения Землей перигелия и афелия (примерно 3 января и 4 июля). А среднее экваториальное Солнце совпадает со средним эклиптическим Солнцем как раз в момент весеннего равноденствия, но при этом движется равномерно по небесному экватору. Напомним, что для участников олимпиады необязательно приводить эти рассуждения.

3. **(4 балла)** Поскольку Марс обращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и вокруг Солнца, то продолжительность марсианских солнечных суток $T_\odot$ связана с продолжительностью его звездных суток T_* и с орбитальным периодом Марса T_M следующей формулой::

$$\frac{1}{T_\odot} = \frac{1}{T_*} - \frac{1}{T_M}$$

Отсюда $T_{\odot} = 24^h 39^m 20^s$, т. е. **марсианский сол длиннее земных суток на $\mathbf{39^m 20^s}$**. Заметим, что у участника олимпиады может появиться искушение просто отнять 24 часа от продолжительности марсианских *звездных* суток. Однако такой ответ будет неверным и оценивается в 0 баллов.

4. **(4 балла)** Отыщем сначала суммарную абсолютную величину типичного шарового скопления:

$$\frac{L_\Sigma}{L_\odot} = 10^{0,4(M_\odot - M_\Sigma)}$$

$$100\,000 = 10^{0,4(4,8 - M_\Sigma)}$$

$$M_\Sigma = -7,7^m$$

Воспользуемся формулой $M = m + 5 - 5\lg r$: зная, что для самых удаленных скоплений $m = 25^m$, получаем $\boldsymbol{r = 35}$ **Мпк**. Т. е. шаровые скопления мы можем наблюдать даже в довольно далеких галактиках.

5. **(8 баллов)** Для того, чтобы покинуть гравитационное поле Земли, кораблю следует развить относительно нее скорость, достаточную для выхода на параболическую орбиту: $v_п = \sqrt{2GM/r}$. Вроде бы очевидно – чем больше расстояние от Земли, тем меньшая скорость позволит нам оторваться от нее. Однако мы же еще движемся по переходной орбите, и нам необходимо разогнаться лишь относительно орбитальной скорости. А она в перигее выше, поэтому неочевидно, какая из точек окажется выгоднее – перигей с большей гравитацией и большей орбитальной скоростью или апогей с меньшим влиянием Земли, но и с меньшим первоначальным “толчком”. Посчитаем дополнительную сокрость, необходимую для выхода на параболу, для перигея и апогея**:**

$$r_п = a(1-e) \qquad\qquad r_а = a(1+e)$$

$$v_п = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad\qquad v_а = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$\Delta v_п = \sqrt{\frac{2GM}{a(1-e)}} - \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad\qquad \Delta v_а = \sqrt{\frac{2GM}{a(1+e)}} - \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Если сравнить два выражения для скоростей, то можно записать их по обе стороны неравенства (с неизвестным знаком), левую и правую часть разделить на $\sqrt{GM/a}$:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \quad ? \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}$$

Перемножим по диагонали:

$$\sqrt{2(1+e)} - 1 - e \quad ? \quad \sqrt{2(1-e)} - 1 + e$$

$$\sqrt{2(1+e)} - e \quad ? \quad \sqrt{2(1-e)} + e$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}\right) \quad ? \quad 2e$$

$$\sqrt{2}\frac{2e}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} \quad ? \quad 2e$$

$$\sqrt{2} \quad ? \quad \sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}$$

$$2 \quad ? \quad 2 + 2\sqrt{1-e^2}$$

В последнем неравенстве очевидно, что левая часть меньше для всех $e < 1$, значит, в перигее дополнительная скорость, необходимая для перехода на параболу, будет меньше. Следовательно, **более экономичным вариантом будет разгон в перигее** (что и реализуется в реальных космических полетах). Можно показать, что перигей будет лучшим местом для разгона в сравнении не только с апогеем, но и с любой точкой орбиты.

Всего 28 баллов за теоретический тур